El Método de las Características para la Solución de la Ecuación de Transporte

En la derivación de la ecuación de transporte se considera la densidad angular de neutrones, solamente en la vecindad inmediata (espacio-tiempo) de un volumen de control. Siendo que tenemos interés en conocer la densidad angular en el rango completo de energías y ángulos, la ecuación de transporte no se puede convertir en una ecuación puramente diferencial.

Sin embargo, dado que se trata de una ecuación integro-diferencial parcial lineal de primer orden, se puede convertir en una ecuación integral por el método de las características. En este método, la ecuación diferencial parcial se convierte en una ecuación ordinaria, su forma característica, la cual puede ser fácilmente integrada.

El método de las características aplicado a la ecuación de transporte, consiste en resolver dicha ecuación a lo largo de líneas rectas que son proyectadas a través de la solución geométrica, donde las líneas rectas representan las curvas características de la ecuación de transporte (ver figura 1).

El primer término de la ecuación de transporte, es decir el término de las fugas, se puede simplificar, ya que como la corriente de partículas debe dirigirse a lo largo de la dirección $\hat{\Omega}$, respecto a alguna localización arbitraria $\vec{r}_0$, el vector de posición en la dirección $\hat{\Omega}$ se puede expresar como $\vec{r} = \vec{r}_0 + s\,\hat{\Omega}$ (ver figura 2), obteniendo así la simplificación de la ecuación de transporte, es decir:

$$\hat{\Omega}\cdot\nabla\Psi \rightarrow \frac{d}{ds}\Psi(\vec{r}_0 + s\,\hat{\Omega}, \hat{\Omega}, E) \tag{1}$$

prácticamente se trata de una diferencial total para un observador que viaja con los neutrones en la dirección de su movimiento.

Entonces la ecuación de transporte queda:

$$\frac{d}{ds}\Psi(\vec{r}_0 + s\,\hat{\Omega}, \hat{\Omega}, E) + \Sigma(\vec{r}_0 + s\,\hat{\Omega}, E)\Psi(\vec{r}_0 + s\,\hat{\Omega}, \hat{\Omega}, E) = q(\vec{r}_0 + s\,\hat{\Omega}, \hat{\Omega}, E) \tag{2}$$

Esta ecuación se puede integrar directamente, con la ventaja de que la implementación es directa tanto para aplicaciones bidimensionales como para aplicaciones tridimensionales. Además, el método de solución no requiere la formación y subsecuente solución de una complicada ecuación matricial acoplada como en el caso del método de las probabilidades de colisión.

La solución general de la ecuación (2) en términos del flujo angular y para alguna posición inicial $\vec{r}_0$, esta dada por:

$$\Psi(\vec{r},\hat{\Omega},E)=\Psi(\vec{r}_0,\hat{\Omega},E)e^{-\int_0^s \Sigma(\vec{r}_0+s'\hat{\Omega},E)ds'}+\int_0^s q(\vec{r}_0+s'\hat{\Omega},\hat{\Omega},E)e^{-\int_{s'}^{s}\Sigma(\vec{r}_0+s''\hat{\Omega},E)ds''}ds' \qquad (3)$$

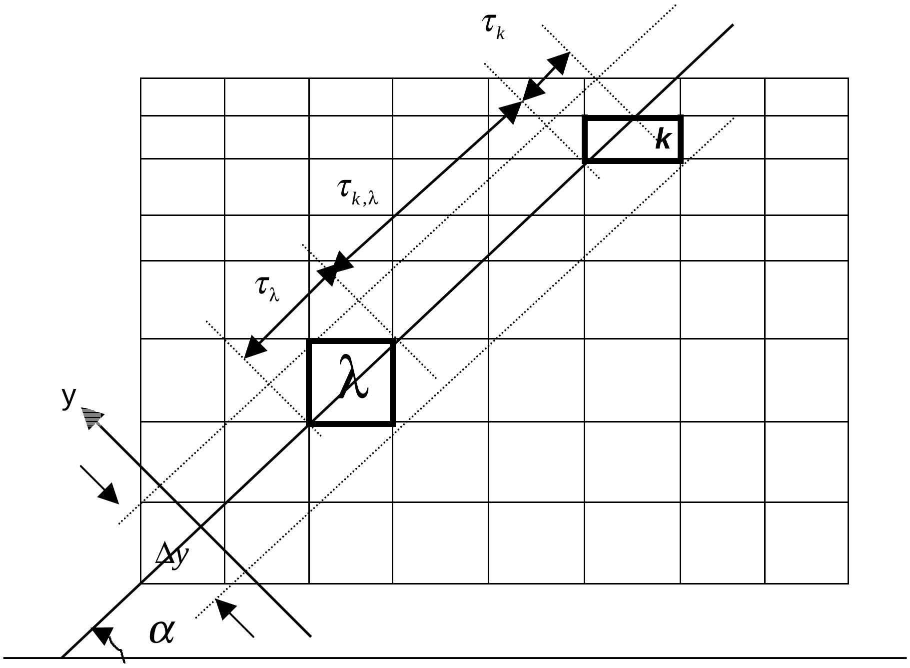

Figura 1. Ilustración de las curvas características.

Si la ecuación (3) se aplica a una pequeña región empezando en la posición $\vec{r}_0$ a lo largo de un rayo en la dirección $\hat{\Omega}$ en donde las propiedades de los materiales son constantes y el término de fuente puede considerarse también constante, entonces las integrales de la ecuación pueden determinarse explícitamente. La expresión resultante para el flujo angular es:

$$\Psi(\vec{r},\hat{\Omega},E)=\Psi(\vec{r}_0,\hat{\Omega},E)e^{-\Sigma(\vec{r},E)s}+\frac{q(\vec{r},\hat{\Omega},E)}{\Sigma(\vec{r},E)}\left(1-e^{-\Sigma(\vec{r},E)s}\right) \qquad (4)$$

donde $\vec{r}=\vec{r}_0+s\hat{\Omega}$.

La ecuación anterior es la ecuación básica que gobierna la determinación del flujo angular en el Método de las Características.

Suponiendo dispersión isotrópica, el término de fuente de la ecuación (2) se puede escribir de la siguiente forma:

$$q(\vec{r},\hat{\Omega},E)=\frac{Q(\vec{r},E)}{4\pi} \qquad (5)$$

donde $Q(\vec{r},E)$ es el término de fuente para partículas isotrópicas. En el caso de los neutrones, este término de fuente consiste de una componente de fisión y una componente de neutrones dispersados:

$$Q(\vec{r},E)=\chi(\vec{r},E)\int_0^\infty \nu\Sigma_f(\vec{r},E')\phi(\vec{r},E')dE'+\int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r},E'\to E)\phi(\vec{r},E')dE' \qquad (6)$$

donde $\chi(\vec{r},E)$ es la fracción de neutrones de fisión que son generados con energía E en la posición $\vec{r}$, $\nu\Sigma_f(\vec{r},E')$ es la sección eficaz dependiente de la energía para la generación de neutrones de fisión en la posición $\vec{r}$ y $\Sigma_s(\vec{r},E'\to E)$ es la sección eficaz de dispersión de la energía E' a la energía E en la posición $\vec{r}$.

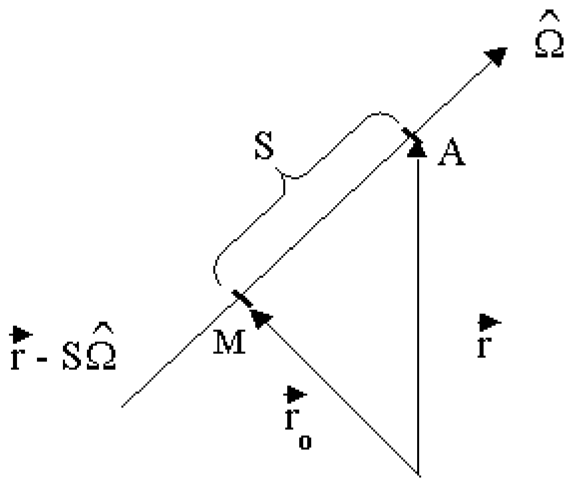

Figura 2. Esquema del transporte de neutrones.